Министерство образования и науки
Российской Федерации
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова»

Н.С. Зорина

Методы оптимальных решений

Методическое пособие для студентов очной и заочной форм обучения направления «Экономика», профиль «Финансы и кредит»

Рубцовск 2015

УДК 330.4

Зорина Н.С. Методы оптимальных решений: Методическое пособие для студентов очной и заочной форм обучения направления «Экономика», профиль «Финансы и кредит» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2015. – 38 с.

Методическое пособие разработано на основе ФГОС ВПО по направлению «Экономика». В пособии рассматриваются вопросы построения математических моделей производственных задач, методы решения задач линейного и нелинейного программирования, применение табличного процессора для решения оптимизационных задач.

В пособии приведены задания для практических занятий по дисциплине, задания для контрольных работ для студентов заочной формы обучения, даны методические указания к их выполнению.

Рассмотрено и одобрено на заседании
НМС РИИ
Протокол № 1 от 19 февраля 2015 г.

Рецензент: к. ф.-м.н., доцент,
зав. кафедрой «ВМФиХ» Г.А. Обухова

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью изучения дисциплины «Методы оптимальных решений» является теоретическая и практическая подготовка студентов в области применения математических методов к экономической теории и практике.

Задачами дисциплины являются:

- изучение основных математических результатов в теории экстремумов функций многих переменных;
- развитие практических навыков в переходе от экономической постановки задачи к математической модели;
- формирование математического подхода к решению практических задач.

Дисциплина «Методы оптимальных решений» входит в вариативную часть цикла общих математических и естественно-научных дисциплин ФГОС ВПО направления «Экономика».

1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ И ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Общая постановка и различные формы задачи линейного программирования

Линейное программирование (ЛП) — это раздел математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции. Однако для исследования линейной функции многих переменных на условный экстремум нельзя применить хорошо разработанные методы математического анализа.

Определение 1.1. Общей задачей линейного программирования (ЛП) называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции при условиях

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,k}), \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1,m}), \tag{1.3}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l,\ l \le n}), \tag{1.4}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины и $k \le m$.

Определение 1.2. Функция (1.1) называется *целевой функцией* (или *линейной формой)* задачи (1.1)—(1.4), а условия (1.2)—(1.4) — *ограничениями* данной задачи.

Определение 1.3. *Стандартной* (или *симметричной) задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1.1) при выполнении условий (1.2) и (1.4), где $k = m$ и $l = n$.

Определение 1.4. *Основной* (или *канонической) задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1.1) при выполнении условий (1.3) и (1.4), где $k = 0$ и $l = n$.

Определение 1.5. Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1.2)—(1.4), называется *допустимым решением* (или *планом)*.

Определение 1.6. План $X^* = (x^*_1, x^*_2, \dots {}^*x_n)$, при котором целевая функция задачи (1.1) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным.*

Значение целевой функции (1.1) при плане X будем обозначать через $F(X)$. Следовательно, X^* — оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F(X) < F(X^*)$ [соответственно $F(X) > F(X^*)$].

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определен оптимальный план любой из трех задач.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно в общем случае уметь, во-первых, сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации, во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и, наоборот, в-третьих, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

В том случае, когда требуется найти минимум функции $F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$, можно перейти к нахождению максимума функции $F_1 = -F = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - ... - c_n x_n$, поскольку функция F принимает минимальное значение в той же точке, в которой функция F1 принимает максимальное значение.

Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид «≤», можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида «≥» – в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n \le b_i$ преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n + x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \ge 0), \tag{1.5}$$

а ограничение-неравенство $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n \ge b_i$ – в ограничение-равенство

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n - x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \ge 0). \tag{1.6}$$

В то же время каждое уравнение системы ограничений $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n = b_i$ можно записать в виде неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + ... + a_{in} x_n \le b_i, \\ -a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - ... - a_{in} x_n \le -b_i. \end{cases} \tag{1.7}$$

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражаются расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в канонической форме, равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

Задачи.

1.1. Составить математическую модель задачи:

Мастерская производит 2 модели сборных книжных полок – модель А и модель В. Ограничения:

Для каждого изделия модели А требуется 3 кв.м досок, а изделия модели В – 4 кв.м.

Мастерская может получать от поставщика до 100 кв.м досок в неделю.

Для каждого изделия модели А требуется 1 ч машинного времени, а для модели В – 2,5 часа.

В неделю можно использовать 40 ч. машинного времени.

Сколько изделий каждой модели следует выпускать в неделю, чтобы максимизировать прибыль, если каждое изделие модели А приносит 600 руб. прибыли, а изделие модели В – 900 рублей прибыли?

1.2. Записать в канонической форме задачи линейного программирования:

а) $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,5}).$

б) $F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,4}).$

1.2. Графический метод решения задачи ЛП

Задача с двумя переменными.

Найти решение $x = (x_1;\ x_2)$, доставляющее

$$\max\ (\min)\ F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \qquad (1.8)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,k}), \qquad (1.9)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\ . \qquad (1.10)$$

Начнем с геометрической интерпретации области допустимых решений. Каждое из неравенств (1.9) определяет на координатной плоскости x_1Ox_2 некоторую полуплоскость, а система неравенств (1.9), (1.10) в случае ее совместности — их пересечение. Это будет выпуклое множество.

Перейдем к геометрической интерпретации целевой функции (1.8). Уравнение $F = c_1 x_1 + c_2 x_{2n}$ при фиксированном значении $F=F_0$ определяет на плоскости прямую линию $F_0 = c_1 x_1 + c_2 x_{2n}$. При изменении F получим семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня.* Вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$ с координатами из коэффициентов при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня. Вектор $\vec{C}(-\vec{C})$ показывает направление наибольшего возрастания (убывания) целевой функции.

Если построить на одном рисунке область допустимых решений, вектор $\vec{C}(-\vec{C})$ и одну из линий уровня, например F = 0, то задача сводится к определению в области допустимых решений точки в направлении вектора $\vec{C}(-\vec{C})$, через которую проходит линия уровня $F_{\max}\ (F_{\min})$, соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции F. Это и есть графический способ решения ЗЛП. Если задача разрешима, могут представиться следующие случаи: задача имеет единственное решение, задача имеет бесконечное множество решений, целевая функция не ограничена, область допустимых решений — единственная точка, задача не имеет решения.

Задачи.

1.3. Используя геометрическую интерпретацию, найдите решение задач:

а) $F = x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,2})$.

б) $F = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,2})$.

в) $F = -2x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,2})$.

г) $F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,5})$.

2. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛП

2.1. Свойства решений задач ЛП

Рассмотрим задачу ЛП

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (\max) \ , \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}) \, , \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}) \, . \tag{2.3}$$

Можно доказать, что множество K планов задачи (2.1)- (2.3) является выпуклым, т.е. если $x^*{}_1$ и $x^*{}_2$ – планы задачи, то их выпуклая линейная комбинация $x^* = \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*$, где $0 \le \lambda \le 1$, также является планом задачи. Т.к. это множество определяется конечной совокупностью линейных ограничений (2.2) и (2.3), его граница состоит из кусков нескольких гиперплоскостей. Множество K может быть либо пустым множеством, либо выпуклой многогранной областью, уходящей в бесконечность.

Теорема 2.1. Линейная функция (2.1) задачи (2.1)- (2.3) достигает максимального значения в вершине многогранника планов. Если линейная функция принимает максимальное значение более чем в одной вершине, то она достигает такого же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Чтобы выразить аналитически утверждение второй части теоремы, обозначим через $\overline{x}_1^*, \ldots, \overline{x}_t^*$ вершины, в которых F достигает максимального значения. Тогда любую точку $\overline{x}^*$, в которой F достигает такого же значения, можно представить в виде $\overline{x}^* = \lambda_1 \overline{x}_1^* + ... + \lambda_t \overline{x}_t^*$, где $\lambda_k \geq 0$ $(k = \overline{1,t})$, $\sum_{k=1}^{t} \lambda_k = 1$, т.е. если F достигает максимального значения более чем в одной вершине, то она достигает такого же значения в любой точке ребра или грани, которые определяются этими вершинами.

2.2. Алгоритм решения задачи ЛП симплекс-методом

Рассмотренный графический способ применим к весьма узкому классу задач линейного программирования: эффективно им можно решать задачи, содержащие не более двух переменных. Одним из универсальных методов является симплекс-метод, называемый также методом последовательного улучшения плана.

Пусть задача записана в каноническом виде (2.1)–(2.3).

Решение задачи состоит из двух этапов: на первом находят какой-либо начальный опорный план $\overline{X_0}$, на втором – переходят от начального плана $\overline{X_0}$ к другому, более близкому к оптимальному, опорному плану $\overline{X_1}$, затем к следующему $\overline{X_2}$ и так до тех пор, пока задача не будет решена.

Алгоритм нахождения начального опорного плана:

1. Записать задачу в форме симплексной таблицы (таблица 2.1) так, чтобы все элементы столбца свободных членов были неотрицательными, т.е. выполнялось неравенство $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1,m})$. Уравнения системы (2.2), в которых свободные члены отрицательны, предварительно умножаются на -1.

Таблица 2.1

	b_i	x_1	…	x_n
0	b_1	a_{11}	…	a_{1n}
…	…	…	…	…
0	b_m	a_{m1}	…	a_{mn}
f	0	$-c_1$	…	$-c_n$

2. Таблицу 2.1 преобразовать шагами жордановых исключений, замещая нули в левом столбце соответствующими *x*. Разрешающим может быть выбран любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент. Разрешающая строка определяется по наименьшему из отношений свободных членов к соответствующим положительным элементам (такие отношения будем называть симплексными).

Один шаг обыкновенного жорданова исключения переводит таблицу 1 в таблицу 2.2 по следующей схеме:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{p} & \dfrac{q}{p} \\ -\dfrac{r}{p} & s - \dfrac{qr}{p} \end{bmatrix},$$

где p – ведущий элемент;

q – элемент ведущей строки;
r – элемент ведущего столбца;
s – произвольный элемент таблицы.

В ходе жордановых исключений столбцы под "переброшенными" на верх таблицы нулями (разрешающие столбцы) можно вычеркивать. Подлежат вычеркиванию и строки, состоящие из одних нулей.

Если в процессе исключений встретится 0-строка, все элементы которой — нули, а свободный член отличен от нуля, то система ограничительных уравнений решений не имеет.

Если же встретится 0-строка, в которой, кроме свободного члена, других положительных элементов нет, то система ограничительных уравнений не имеет неотрицательных решений.

Чтобы выписать из таблицы компоненты опорного плана, надо положить равными нулю свободные переменные, тогда базисные переменные будут равны соответствующим свободным членам: $x_1 = b_1^*, \dots, x_r = b_r^*$, $x_{r+1} = 0, \dots,$ $x_n = 0$ или $\overline{x_0} = (b_1^*; \dots; b_r^*; 0; \dots; 0)$. Отвечающее опорному плану $\overline{x_0}$ значение функции f равно свободному члену b_0, т.е. $f(\overline{x_0}) = b_0$.

Таблица 2.2

	b_i^*	x_{r+1}	$\dots$	x_n
x_1	b_1^*	a_{11}^*	$\dots$	$a_{1,n-r}^*$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_r	b_r^*	a_{r1}^*	$\dots$	$a_{r,n-r}^*$
f	b_0	c_1^*	$\dots$	c_{n-r}^*

В случае, когда в столбце свободных членов имеются отрицательные числа, разрешающий элемент выбирают следующим образом:

1) просматривают строку, отвечающую какому-либо отрицательному свободному члену, например, t – строку, и выбирают в ней какой-либо отрицательный элемент, а соответствующий ему столбец принимают за разрешающий (мы предполагаем, что ограничения задачи совместны);

2) составляют отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца, имеющим одинаковые знаки (симплексные отношения);

3) *из симплексных отношений выбирают* наименьшее, оно и определит разрешающую строку (пусть ею будет, например, р – строка).

4) на пересечении разрешающих столбца и строки находят разрешающий элемент, с которым и делают шаг жорданова исключения.

Если разрешающим оказался элемент t –строки, то преобразованный свободный член этой строки станет положительным. В противном случае после сделанного шага вновь обращаются к t – строке. Если задача разрешима, то через некоторое число шагов в столбце свободных членов не останется отрицательных элементов.

Алгоритм нахождения оптимального опорного плана:

Начальный опорный план $\overline{x_0}$ исследуется на оптимальность,

1. Если в f-строке нет отрицательных элементов (не считая свободного члена), — план оптимален.

Из таблицы 2.2 видно, что $f = b_0 - (c_1^* x_{r+1} + ... + c_{n-r}^* x_n)$, откуда следует, что при $c_1^* \geq 0, ..., c_{n-r}^* \geq 0$ увеличение любой из свободных переменных $x_{r+1}, ..., x_n$ вызывает уменьшение f. Следовательно, наибольшего значения f достигает при $x_{r+1} = ... = x_n = 0$ (отрицательными они быть не могут в силу условия (2.3)), т.е. при $\overline{x_0}$.

Если в f-строке нет также и нулевых элементов, то оптимальный план единственный; если же среди элементов есть хотя бы один нулевой, то оптимальных планов бесконечное множество.

2. Если в f-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в соответствующем ему столбце нет положительных, то целевая функция не ограничена в допустимой области ($f \to \infty$). Задача неразрешима.

3. Если в f-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в каждом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный, то можно перейти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному. Для этого столбец с отрицательным элементом в f-строке берут за разрешающий (если в f-строке отрицательных элементов несколько, разрешающим выбирают столбец с наибольшим по абсолютной величине отрицательным элементом); определяют по минимальному симплексному отношению разрешающую строку и делают шаг жорданова исключения. Полученный план вновь исследуют на оптимальность.

Описанный процесс повторяется до тех пор, пока не будет найден оптимальный опорный план либо установлена неразрешимость задачи.

Замечание. Поскольку $\min f = -\max(-f)$, задачу минимизации можно формально заменить задачей максимизации функции $-f$, но можно этого и не делать. Признаком оптимальности опорного плана задачи минимизации является отсутствие положительных элементов в f-строке симплекс-таблицы, содержащей опорный план. Вся остальная вычислительная процедура остается прежней.

Задачи.

2.1. Составить математическую модель задачи, найти решение симплекс-методом:

Кондитерская фабрика для изготовления трех видов конфет А, В и С использует 3 вида сырья: сахар, патоку и фруктовое пюре. В таблице указаны нормы расхода сырья для каждого вида 1 т конфет, общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано, и прибыль от реализации 1 т конфет данного вида.

Вид сырья	*Нормы расхода сырья на 1 т конфет*			*Общее кол-во сырья*
	A	B	C	
Сахар	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,2	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	0	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации	108	112	126	

Найти оптимальный план производства конфет, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

2.2. Используя симплекс-метод, найти решение задач:

а) $F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,3})$.

б) $F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,4})$.

2.3. Двойственная задача линейного программирования

Дадим определение двойственной задачи по отношению к общей задаче ЛП, состоящей в нахождении максимального значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{2.4}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,k}), \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1,m}), \tag{2.6}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l,\; l \le n}). \tag{2.7}$$

Определение 2.7. Задача, состоящая в определении минимального значения функции

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \tag{2.8}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = \overline{1,l}), \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad (j = \overline{l+1,n}), \tag{2.10}$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,k,\; k \le m}), \tag{2.11}$$

называется двойственной по отношению к задаче (2.4)–(2.7).

Задачи (2.4)–(2.7) и (2.8)—(2.11) образуют пару задач, называемую в линейном программировании ***двойственной парой.***

Сравнивая две сформулированные задачи, видим, что двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим пяти правилам.

1. Целевая функция исходной задачи (2.4)–(2.7) задается на максимум, а целевая функция двойственной (2.8)—(2.11) — на минимум.

2. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, \ldots\, a_{1n} \\ a_{21}\;\; a_{22} \ldots\, a_{2n} \\ \ldots\;\; \ldots\;\; \ldots\; \ldots. \\ a_{m1}\;\; a_{m2} \ldots\, a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничения (2.5)–(2.6) исходной задачи (2.4)–(2.7), и аналогичная матрица

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, \ldots\, a_{m1} \\ a_{21}\;\; a_{22} \ldots\, a_{m2} \\ \ldots\;\; \ldots\;\; \ldots\; \ldots. \\ a_{1n}\;\; a_{2n} \ldots\, a_{nm} \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

в двойственной задаче (2.8)—(2.11) получаются друг из друга транспонированием (то есть заменой строк столбцами, а столбцов — строками).

3. Число переменных в двойственной задаче (2.8)—(2.11) равно числу ограничений в системе (2.5)–(2.6) исходной задачи (2.4)–(2.7), а число ограничений в системе (2.9)–(2.10) двойственной задачи — числу переменных в исходной задаче.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции (2.8) двойственной задачи (2.8)—(2.11) являются свободные члены в системе (2.5)–(2.6) исходной задачи (2.4)–(2.7), а правыми частями в ограничениях системы (2.9)–(2.10) двойственной задачи — коэффициенты при неизвестных в целевой функции (2.4) исходной задачи.

5. Если переменная x_j исходной задачи (2.4)–(2.7) может принимать только неотрицательные значения, то j-е ограничение двойственной задачи (2.8)—(2.11) является неравенством вида " $\geq$ ". Если же переменная x_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то *j*-е ограничение представляет собой уравнение.

Аналогичные связи имеют место между ограничениями (2.5)–(2.6) исходной задачи (2.4)–(2.7) и переменными двойственной задачи (2.8)—(2.11). Если *i* -е ограничение исходной задачи является неравенством, то *i*-я переменная двойственной задачи $y_i \geq 0$. Если же *i*-е ограничение есть уравнение, то переменная y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Задачи.

2.3. Построить двойственные задачи:

а) $F = 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$ б) $F = 2x_2 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 9, \\ 3x_2 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0\ \ (j = \overline{1,5}).$$

2.4. Связь между решениями прямой и двойственной задач

Существующие зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются сформулированными ниже леммами и теоремами двойственности.

Лемма 2.1. Если X — некоторый план исходной задачи (2.4)–(2.7), а Y — произвольный план двойственной задачи (2.8)—(2.11), то значение целевой функции исходной задачи на плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи на плане Y, то есть $F(X) \le F^*(Y)$.

Лемма 2.2. Если $F(X^*) = F^*(Y^*)$ для некоторых планов X^* *и* Y^* задач (2.4)–(2.7) и (2.8)—(2.11), то X^* — оптимальный план исходной задачи, а Y^* — оптимальный план двойственной задачи.

Теорема 2.9 (первая теорема двойственности). Если одна из пары двойственных задач (2.4)–(2.7) или (2.8)—(2.11) имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, то есть $F_{max} = F^*_{min}$.

Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена [для исходной (2.4)–(2.7) — сверху, для двойственной и (2.8)—(2.11) — снизу], то другая задача вообще не имеет планов.

Теорема 2.10 (вторая теорема двойственности). План $X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$ задачи (2.4)–(2.7) и план $Y^* = (y^*_1, y^*_2, \ldots y^*_m)$ задачи и (2.8)—(2.11) являются оптимальными планами этих задач тогда и только тогда, когда для любого j $(j = \overline{1,n})$ выполняется равенство

$$\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right] x_j^* = 0.$$

Задачи.

2.4. Решить задачи и двойственные к ним:

а) $F = 270x_1 + 300x_2 + 320x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0\ \ (j = \overline{1,3}).$$

б) $F = 6x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0\ \ (j = \overline{1,2}).$$

3. ЗАДАЧИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

3.1. Экономическая и геометрическая интерпретации задачи дробно-линейного программирования

Общая задача дробно-линейного программирования состоит в определении максимального значения функции

$$F=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}=\frac{F_1}{F_2}, \tag{3.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=\overline{1,m}), \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}), \tag{3.3}$$

где a_{ij}, b_i, c_j, d_j – некоторые постоянные числа, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n})$ и $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$ в области неотрицательных решений системы линейных уравнений (3.2).

Как и в случае основной задачи линейного программирования, свое максимальное значение целевая функция задачи (3.1)—(3.3) принимает в одной из вершин многогранника решений, определяемой системой ограничений (3.2) и (3.3). Если максимальное значение целевая функция задачи (3.1) принимает более чем в одной вершине многогранника решений, то она достигает его также во всякой точке, являющейся выпуклой комбинацией данных вершин.

Рассмотрим задачу, состоящую в определении максимального значения функции

$$F=\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \tag{3.4}$$

при условиях

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \quad (i=\overline{1,m}), \tag{3.5}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,2}). \tag{3.6}$$

Чтобы найти решение задачи (3.4)—(3.6), сначала построим многоугольник решений, определяемый ограничениями (3.5) и (3.6). Допуская, что этот многоугольник не пуст, полагаем значение функции равным некоторому числу h, так что прямая

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = h, \tag{3.7}$$

проходящая через начало координат, имеет общие точки с многоугольником решений. Вращая построенную прямую вокруг начала координат, либо определяем вершину (вершины), в которой функция (3.4) принимает максимальное значение, либо устанавливаем неограниченность функции на множестве планов задачи.

Итак, процесс нахождения решения задачи (3.4)—(3.6) включает шесть этапов.

1. В системе ограничений задачи заменяют знаки неравенств на знаки точных равенств и строят определяемые этими равенствами прямые.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи.

3. Находят многоугольник решений задачи.

4. Строят прямую (3.7), уравнение которой получается, если положить значение целевой функции (3.4) равным некоторому постоянному числу.

5. Определяют точку максимума или устанавливают неразрешимость задачи.

6. Находят значение целевой функции в точке максимума.

Задачи.

3.1. Составить математическую модель задачи и найти решение задачи на основе геометрической интерпретации:

Для производства двух видов изделий А и *В* предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на трех типах оборудования. Время обработки каждого из изделий на оборудовании данного типа приведено в таблице. В ней же указаны затраты, связанные с производством одного изделия каждого вида.

Тип оборудования	Затраты времени (ч) на обработку одного изделия	
	A	*B*
I	*2*	8
II	*1*	1
III	12	3
Затраты на производство одного изделия	2	3

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч соответственно, а оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

3.2. Сведение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования

Сформулированная выше задача (3.1)—(3.3) может быть сведена к задаче линейного программирования. Для этого следует обозначить

$$y_0 = \{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j\}^{-1} \tag{3.8}$$

и ввести новые переменные

$$y_j = y_0 x_j \quad (j = \overline{1,n}). \tag{3.9}$$

Используя введенные обозначения, исходную задачу (3.1)— (3.3) сведем к следующей: найти максимум функции

$$F^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \tag{3.10}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 \quad (i = \overline{1,m}), \tag{3.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, \tag{3.12}$$

$$y_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}) \text{ и } y_0 \geq 0. \tag{3.13}$$

Задача (3.10)—(3.13) является задачей линейного программирования, а следовательно, ее решение можно найти известными методами. Зная оптимальный план этой задачи, на основе соотношений (3.9) получаем оптимальный план исходной задачи (3.1)—(3.3).

Таким образом, процесс нахождения решения задачи дробно-линейного программирования включает три этапа.

1. Задачу (3.1)—(3.5) сводят к задаче линейного программирования (3.10)—(3.13).
2. Находят решение задачи (3.10)—(3.13).
3. Используя соотношения (3.9), определяют оптимальный план задачи (3.1)—(3.3) и находят максимальное значение функции (3.1).

Задачи.

3.2. Найти решение задач:

а) $F=\dfrac{-5x_1+2x_2}{3x_1+4x_2}\to \max$

$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_3=16, \\ 2x_1+3x_2-x_4=12, \\ 3x_1-2x_2+x_5=18, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,5})$.

б) $F=\dfrac{3x_1-x_2}{x_1+x_2}\to \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=5, \\ -x_1+3x_2+x_4=7, \\ 3x_1-x_2+x_5=11, \end{cases}$$

$x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,5})$.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ, НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.1. Понятие нелинейного программирования

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{4.1}$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq b_i \quad (i=\overline{1,k}), \\ g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = b_i \quad (i=\overline{k+1,m}), \end{cases} \tag{4.2}$$

где f и g_i — некоторые известные функции n переменных, а b_i — заданные числа.

Здесь имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка $X^*=(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$, координаты которой удовлетворяют соотношениям (4.2), и такая, что для всякой другой точки $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условиям (4.2), выполняется неравенство $f(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n) \geq f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ [$f(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n) \leq f(x_1, x_2, \ldots x_n)$].

Если f и g_i — линейные функции, то задача (4.1)—(4.2) является задачей линейного программирования.

Соотношения (4.2) образуют систему ограничений и включают в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

В евклидовом пространстве E_n система ограничений (4.2) определяет область допустимых решений задачи. В отличие от задачи линейного программирования, она не всегда является выпуклой.

Если определена область допустимых решений, то нахождение решения задачи (4.1)—(4.2) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня: $f(x_1, x_2, ...x_n) = h$. Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри нее.

Процесс нахождения решения задачи нелинейного программирования (4.1)—(4.2) с использованием геометрической интерпретации включает четыре этапа.

1. Находят область допустимых решений задачи, определяемую соотношениями (4.2) (если она пуста, то задача не имеет решения).

2. Строят гиперповерхность $f(x_1, x_2, ...x_n) = h$.

3. Определяют гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (4.1) сверху (снизу) на множестве допустимых решений.

4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит гиперповерхность наивысшего (наинизшего) уровня, и определяют в ней значение функции (4.1).

Задачи.

4.1. Найти максимальное и минимальное значение функции:

а) $F = -x_1^2 + x_2 + 6x_1$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,2})$.

б) $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 10x_1 - x_2 \le 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,2})$.

4.2. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования (4.1)—(4.2), предположив, что система ограничений (4.2) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных и $f(x_1, x_2, ...x_n)$ и $g_i\ (x_1, x_2, ...x_n)$ — непрерывные функции вместе со своими частными производными

$$f(x_1, x_2, ...x_n) \to \max\ (\min); \tag{4.3}$$

$$g_i\ (x_1, x_2, ...x_n) = b_i \ \ (i = \overline{1,m}). \tag{4.4}$$

В курсе математического анализа задачу (3.3)—(3.4) называют *задачей на условный экстремум,* или *классической задачей оптимизации.* Чтобы найти ее решение, вводят набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_m$, называемых *множителями Лагранжа,* составляют *функцию Лагранжа*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)], \tag{4.5}$$

находят частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_j}\ (j=\overline{1,n})$ и $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\ (i=\overline{1,m})$ и рассматривают систему $n+m$ уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \ \ (j=\overline{1,n}); \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \ \ (i=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{4.6}$$

с $n+m$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots x_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$. Всякое решение системы уравнений (4.6) определяет точку $X = (x_1^0, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$, в которой может иметь место экстремум функции $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Следовательно, решив систему уравнений (4.6), получают все точки, в которых функция (4.3) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как и в случае безусловного экстремума.

Таким образом, определение экстремальных точек задачи (4.3)—(4.4) методом множителей Лагранжа включает четыре этапа.

1. Составляют функцию Лагранжа.

2. Находят частные производные от функции Лагранжа по переменным x_j и λ_i приравнивают их нулю.

3. Решая систему уравнений (4.6), находят точки, в которых целевая функция задачи может иметь экстремум.

4. Среди точек, в которых ожидается возможность экстремума, находят такие, в которых достигается экстремум, и вычисляют значения функции (4.3) в них.

Задачи.

4.2. Найти минимальное значение функции:

а) $F = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$

$x_1 + x_2 = 180,$

$x_j \geq 0 \ \ (j=\overline{1,2}).$

4.3. Найти условные экстремумы функций:

а) $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

б) $F = x_1 x_2 x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 x_2 + x_2 x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$$

5. ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

5.1. Целочисленные задачи линейного программирования

Экстремальная задача, переменные которой принимают лишь целочисленные значения, называется *задачей целочисленного программирования.*

В математической модели задачи целочисленного программирования как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Ограничимся случаем, когда целевая функция и система ограничений задачи являются линейными.

Рассмотрим задачи целочисленного программирования, в которых как целевая функция, так и функции в системе ограничений являются линейными. В связи с этим сформулируем основную задачу линейного программирования, в которой переменные могут принимать только целые значения. В общем виде эту задачу можно записать так: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \qquad (5.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (5.2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (5.3)$$

$$x_j \text{ – целые.} \qquad (5.4)$$

Если искать решение задачи (5.1)—(5.4) симплексным методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нет. В общем же случае для определения оптимального плана данной задачи требуются специальные методы. Наиболее известен метод Гомори, основывающийся на описанном выше симплексном методе.

5.2. Метод Гомори решения задач целочисленного программирования

Решение задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи (5.1)—(5.3) без учета целочисленности переменных. После того как план найден, просматривают его компоненты. Если среди них нет дробных чисел, то этот план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования (5.1)—(5.4). Если же в оптимальном плане задачи (5.1)—(5.3) переменная x_j принимает дробное значение, то к системе уравнений (5.2) добавляют неравенство

$$\sum_{j} f(a_{ij}^*) x_j \ge f(b_i^*) \qquad (5.5)$$

и находят решение задачи (5.1)—(5.3), (5.5).

В неравенстве (5.5) a_{ij}^* и b_i^* — преобразованные исходные величины a_{ij} и b_i, значения которых взяты из последней симплекс-таблицы, а $f(a_{ij}^*)$ и $f(b_i^*)$ — *дробные части чисел (под дробной частью некоторого числа a понимается наименьшее неотрицательное число b* — такое, что разность между a и b есть целое). Если в оптимальном плане задачи (5.1)—(5.3) дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство (5.5) определяется наибольшей дробной частью.

Неравенство (5.5) введением дополнительной неотрицательной целочисленной переменной x_{n+1} преобразовывают в эквивалентное уравнение.

Симплекс-таблицу расширяют за счет включения дополнительной строки, соответствующей составленному уравнению. Составленную расширенную задачу вновь решают симплекс-методом.

Если в найденном плане задачи (5.1)—(5.3), (5.5) переменные принимают дробные значения, то следует добавить одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторить.

Задачи.

5.1. Найти оптимальное целочисленное решение:

На ферме выращивают лисиц и песцов. Количество корма разного вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, и количество корма каждого вида, которое может быть использовано фермой, приведены в таблице. Также приведена прибыль от реализации одной шкурки.

Вид корма	*Кол-во корма, которое ежедневно должны получать*		*Общее кол-во корма*
	Лисица	Песец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль от шкурки	16	12	

Найти, сколько лисиц и песцов надо выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была максимальной.

5.2. Решить задачи:

а) $F = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 3x_2 \le 7, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,2})$ и целые.

б) $F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 25, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15, \end{cases}$$

$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,3})$ и целые.

6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

6.1. Математическая постановка задачи

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$, в n пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$. При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется либо минимальная стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки. Рассмотрим транспортную задачу, в качестве критерия оптимальности которой взята минимальная стоимость перевозок всего груза. Обозначим через c_{ij} тарифы перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i — запасы груза в i-м пункте отправления, через b_j — потребности в грузе в j -м пункте назначения, а через x_{ij} — количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j -й пункт назначения. Тогда математическая постановка транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \tag{6.1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \tag{6.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{6.3}$$

$$x_{ij} \ge 0 \;\; (i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n}). \tag{6.4}$$

Поскольку переменные x_{ij} $(i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n})$ удовлетворяют системам линейных уравнений (6.2) и (6.3) и условию неотрицательности (6.4), обеспечиваются доставка необходимого количества груза в каждый из пунктов назначения, вывоз имеющегося груза из всех пунктов отправления, а также исключаются обратные перевозки.

Определение 6.1. Всякое неотрицательное решение систем линейных уравнений (6.2) и (6.3), определяемое матрицей $X = (x_{ij})(i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n})$, называется планом транспортной задачи.

Определение 6.2. План $X^* = (x^*_{ij})(i = \overline{1,m};\, j = \overline{1,n})$, при котором функция (6.1) принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом* транспортной задачи.

Обычно исходные данные транспортной задачи записывают в виде таблицы (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Пункт отправления	Пункт назначения					Запасы
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	

Очевидно, общее наличие груза у поставщиков равно $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность в грузе в пунктах назначения равна единице. Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{6.5}$$

то модель такой транспортной задачи называется *закрытой.* Если же указанное условие не выполняется, то модель транспортной задачи называется *открытой.*

Теорема 6.1. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы запасы груза в пунктах отправления были равны потребностям в грузе в пунктах назначения, то есть чтобы выполнялось равенство (6.5).

В случае превышения запаса над потребностью, то есть при

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

вводят фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения с потребностью

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.6}$$

и соответствующие тарифы считают равными нулю: $c_{i\,n+1} = 0$ ($i = \overline{1,m}$).

Полученная задача является транспортной задачей, для которой выполняется равенство (6.5).

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводят фиктивный $(m+1)$-й пункт отправления с запасом груза

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{6.7}$$

и соответствующие тарифы полагают равными нулю: $c_{m+1\,j} = 0$ ($j = \overline{1,n}$).

Этим задача сводится к транспортной задаче с закрытой моделью, из оптимального плана которой получается оптимальный план исходной задачи.

Число переменных x_{ij} в транспортной задаче с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно $n \times m$, а число уравнений в системах (6.2) и (6.3) равно $n + m$. Так как мы предполагаем, что выполняется условие (6.5), то число линейно независимых уравнений равно $n + m$ - 1. Следовательно, опорный план транспортной задачи может иметь не более $n+m$-1 отличных от нуля неизвестных.

Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности $n+m$-1**,** то план является невырожденным, а если меньше — то вырожденным.

Как и для всякой задачи линейного программирования, оптимальный план транспортной задачи является и опорным планом.

Задачи.

6.1. Составить математическую модель транспортной задачи:

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	7	9	200
A_2	5	1	8	12	270

A_3	11	6	4	3	130
Потребности	120	80	240	160	600

6.2. Определение опорного плана транспортной задачи

Как и при решении задачи линейного программирования, симплексным методом, определение оптимального плана транспортной задачи начинают с поиска какого-нибудь ее опорного плана.

Метод северо-западного угла. При нахождении опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} ("северо-западный угол") и заканчивается клеткой для неизвестного x_{mn}, то есть идет как бы по диагонали таблицы с севера на запад.

Метод минимального элемента. Выбор пунктов назначения и отправления целесообразно производить, ориентируясь на тарифы перевозок, а именно: на каждом шаге следует выбирать какую-нибудь клетку, отвечающую минимальному тарифу (если таких клеток несколько, то следует выбрать любую из них), и рассмотреть пункты назначения и отправления, соответствующие выбранной клетке. Сущность метода минимального элемента и состоит в выборе клетки с минимальным тарифом. Следует отметить, что этот метод, как правило, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем общая стоимость перевозок при плане, найденном для данной задачи с помощью метода северо-западного угла.

Метод аппроксимации Фогеля, При определении опорного плана транспортной задачи методом аппроксимации Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце в таблице условий задачи. Среди указанных разностей выбирают минимальную. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф-клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

Задачи.

6.2. Используя методы северо-западного угла, минимального элемента и аппроксимации Фогеля, найдите опорные планы транспортных задач.

а) В пунктах A_1, A_2, A_3, производится однородная продукция в количествах a_1=40ед., a_2=50 ед., a_3=30 ед. Готовая продукция поставляется в пункты B_1, B_2, B_3, B_4, потребности которых составляют: b_1 =35 ед., b_2 =40 ед., b_3 =40 ед., b_4 =30 ед. Стоимость c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j заданы матрицей $\left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$. Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

б)

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	7	1	3	50
A_2	5	9	6	2	70
A_3	8	2	9	11	40
Потребности	30	60	45	25	

6.3. Определение оптимального плана транспортной задачи

Метод потенциалов. Сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Для определения опорного плана транспортной задачи будем пользоваться одним из рассмотренных методов. Эти методы гарантируют получение занятых в исходной таблице условий $n + m - 1$ клеток; в некоторых из них могут стоять нули. Полученный план следует проверить на оптимальность.

Теорема 6.2. Если для некоторого опорного плана $X^* = (x^*_{ij})(\, i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n})$ транспортной задачи существуют такие числа $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$ что

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0, \tag{6.8}$$

$$v_j - u_i \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0 \tag{6.9}$$

для всех $i=\overline{1,m}$ *и* $j=\overline{1,n}$*, то* $X^* = (x^*_{ij})$ *— оптимальный план транспортной задачи.*

Определение 6.3. Числа u_i и v_j ($i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}$) называются *потенциалами* соответственно пунктов назначения и пунктов потребления.

Сформулированная теорема позволяет построить алгоритм нахождения решения транспортной задачи. Он состоит в следующем. Пусть одним из рассмотренных выше методов найден опорный план транспортной задачи. Для каждого из пунктов отправления и назначения определяют потенциалы u_i и v_j ($i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n}$). Эти числа находят из системы уравнений

$$v_j - u_i = c_{ij} \,, \tag{6.10}$$

где c_{ij} — тарифы, стоящие в заполненных клетках таблицы условий транспортной задачи.

Так как число заполненных клеток равно $n + m - 1$, то система (6.10) с $n+m$ неизвестными содержит $n + m — 1$ уравнений. Поскольку число неизвестных превышает на единицу число уравнений, одно из неизвестных можно положить равным произвольному числу, например $u_1 = 0$, и найти последовательно из уравнений (6.10) значения остальных неизвестных. После того как все потенциалы найдены, для каждой из свободных клеток определяют числа $s_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$.

Если среди чисел s_{ij} < 0 нет положительных, то найденный опорный план является оптимальным. Если же для некоторой свободной клетки s_{ij}> 0, то исходный опорный план не является оптимальным и необходимо перейти к новому опорному плану. Для этого рассматривают все свободные клетки, для которых s_{ij} > 0, и среди данных чисел выбирают максимальное. Клетку, которой это число соответствует, следует заполнить.

Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы поставок, записанных в ряде других занятых клеток и связанных с заполненной так называемым циклом.

Определение 6.4. *Циклом* в таблице условий транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья — вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречается ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое — в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами.

При правильном построении опорного плана для любой свободной клетки можно построить лишь один цикл. После того как для выбранной свободной клетки он построен, следует перейти к новому опорному плану — переместить грузы в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой. Это перемещение производят по следующим правилам:

1) каждой из клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, приписывают определенный знак, причем свободной клетке — знак плюс, а всем остальным клеткам — поочередно знаки минус и плюс (будем называть эти клетки минусовыми и плюсовыми);

2) в данную свободную клетку переносят меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. Одновременно это число прибавляют к соответствующим числам, стоящим в плюсовых клетках, и вычитают из чисел, стоящих в минусовых клетках. Клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а минусовая клетка, в которой стояло минимальное из чисел x_{ij}, считается свободной.

Полученный новый опорный план транспортной задачи проверяют на оптимальность. Для этого определяют потенциалы пунктов отправления и назначения и находят числа $s_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ для всех свободных клеток. Если среди этих чисел не окажется положительных, то это свидетельствует о получении оптимального плана. Если же положительные числа имеются, то следует перейти к новому опорному плану. В результате итерационного процесса после конечного числа шагов получают оптимальный план задачи.

Задачи.

6.5. Найти оптимальный план транспортной задачи.

а) В пунктах A_1, A_2, A_3, производится однородная продукция в количествах a_1=100 ед., a_2=150 ед., a_3=50 ед. Готовая продукция поставляется в пункты B_1, B_2, B_3, B_4, потребности которых составляют: b_1 =75 ед., b_2 =80 ед., b_3 =60 ед., b_4 =85 ед. Стоимость c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j заданы матрицей $(c_{ij})_{3\times 4}$.

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

б) пунктах A_1, A_2, A_3, производится однородная продукция в количествах a_1=400 ед., a_2=300 ед., a_3=500 ед. Готовая продукция поставляется в пункты B_1, B_2, B_3, B_4, потребности которых составляют: b_1 =350 ед., b_2 =250 ед., b_3 =150 ед., b_4 =250 ед. Стоимость c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j заданы матрицей $(c_{ij})_{3\times 4}$.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \\ 6 & 10 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

в) Найти начальный опорный план методом «минимального элемента» для транспортной задачи (в верхней таблицы указаны потребности в грузе пунктов B_j, в левом столбце – запасы груза в пунктах A_i, в остальных клетках – тарифы c_{ij}). Методом потенциалов найти оптимальный план и значение целевой функции, соответствующее этому плану.

Пункт отправления	Пункт назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	80
A_2	6	3	5	6	100
A_3	3	2	6	3	70
Потребности	80	50	50	70	

7. РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СРЕДСТВАМИ OpenOffice.org Calc

Для численного решения уравнений со многими неизвестными и ограничениями в электронных таблицах предусмотрен инструмент анализа *Поиск решения*. Процедура поиска решения позволяет найти оптимальное значение формулы содержащейся в ячейке, которая называется целевой. Эта процедура работает с группой ячеек, прямо или косвенно связанных с формулой в целевой ячейке.

Поиск решения в OpenOffice.org Calc.

1. Команда *Сервис \ Поиск решения.*

2. В появившемся диалоговом окне *Решатель* (рис. 7.1.) в поле *Целевая ячейка* ввести ссылку на ячейку, содержащую формулу.

3. В поле Оптимизация результата установить переключатель в одно из положений:

- *Максимум* – чтобы максимизировать значение конечной ячейки путем изменения значений влияющих ячеек;
- *Минимум* – чтобы минимизировать значение конечной ячейки путем изменения значений влияющих ячеек;
- *Значение* – чтобы установить значение в конечной ячейке равным числу, которое задается в соответствующем поле.

4. В поле *Путем изменения ячеек* ввести имена или ссылки на изменяемые ячейки. Изменяемые ячейки должны быть прямо или косвенно связаны с целевой ячейкой.

5. В разделе *Ограничительные условия* ввести все ограничения, накладываемые на поиск решения.

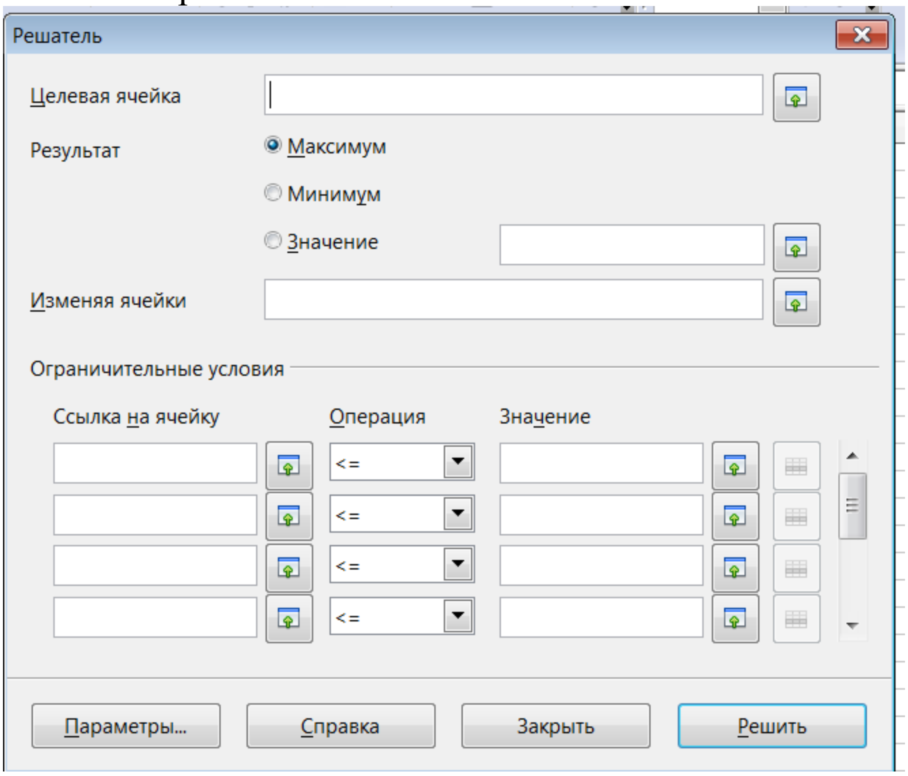


Рис. 7.1. Диалоговое окно инструмента *Поиск решения*

Примечание. Ограничение состоит из трех составных частей: в поле *Ссылка на ячейку* ввести адрес или имя ячейки, на значение которой накладываются ограничения; в поле *Операция* выбрать из раскрывающегося списка условный оператор (<=, =, >=, целое или двоичное); в поле *Значение* ввести число, ссылку на ячейку или ее имя либо формулу.

6. Перейти в диалоговое окно *Параметры* (рис. 7.2.). Здесь можно установить флажки *Принять переменные как неотрицательные* и *Принять переменные как целочисленные*. Выбрать кнопку *ОК*.

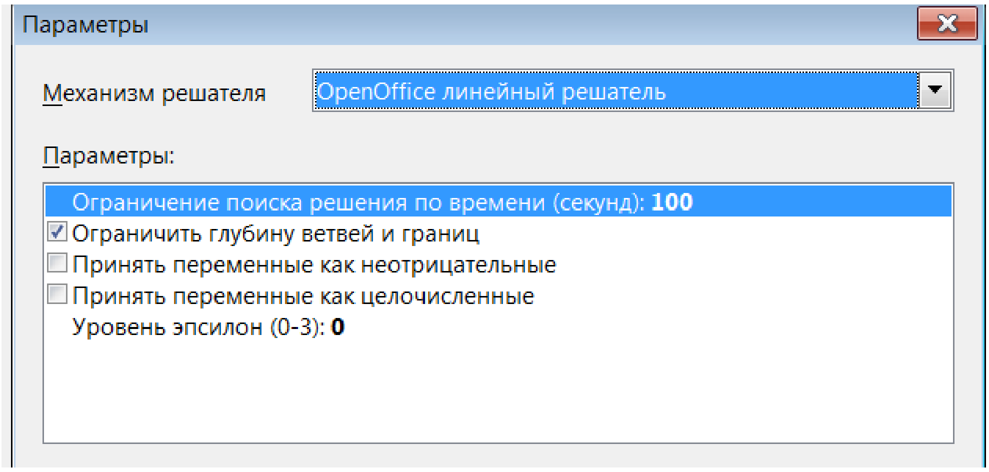


Рис. 7.2. Параметры решателя

7. В диалоговом окне *Поиск решения* нажать кнопку *Решить.* В появившемся диалоговом окне выбрать либо *Сохранить результат*, чтобы установить найденное решение на листе, либо *Восстановить предыдущий*, чтобы вернуть исходные данные.

Задачи.

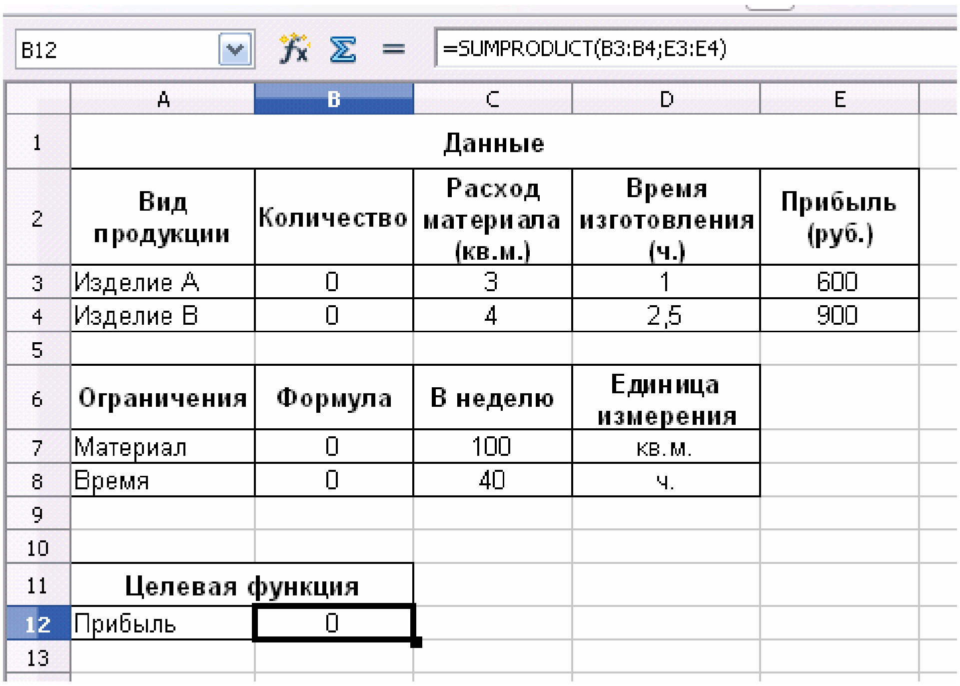
7.1. Мастерская производит 2 модели сборных книжных полок – модель А и модель В. Ограничения:

Для каждого изделия модели А требуется 3 кв.м досок, а изделия модели В – 4 кв.м. Мастерская может получать от поставщика до 100 кв.м досок в неделю. Для каждого изделия модели А требуется 1 ч машинного времени, а для модели В – 2,5 часа. В неделю можно использовать 40 ч машинного времени.

Сколько изделий каждой модели следует выпускать в неделю, чтобы максимизировать прибыль, если каждое изделие модели А приносит 600 руб. прибыли, а изделие модели В – 900 рублей прибыли?

Порядок выполнения работы:

1. Запустить редактор электронных таблиц *OpenOfice.org Calc.*
2. Создаем таблицу решения (вариант оформления приведен на рисунке):



B12 =SUMPRODUCT(B3:B4;E3:E4)

	A	B	C	D	E
1	Данные				
2	Вид продукции	Количество	Расход материала (кв.м.)	Время изготовления (ч.)	Прибыль (руб.)
3	Изделие А	0	3	1	600
4	Изделие В	0	4	2,5	900
5					
6	Ограничения	Формула	В неделю	Единица измерения	
7	Материал	0	100	кв.м.	
8	Время	0	40	ч.	
9					
10					
11	Целевая функция				
12	Прибыль	0			
13					

Рис. 7.3. Оформление листа *OpenOfice.org Calc*

3. Для записи формул использовать функцию *SUMPRODUCT*(Массив1;Массив2) из категории *Массив*.

4. Открываем диалоговое окно *«Решатель» («Поиск решения»)*.

5. Заполняем поля.

6. Добавляем параметры поиска решения (Кнопка *«Параметры»*).

Установить флажок: «*Принять переменные как неотрицательные*» и «*Принять переменные как целочисленные*».

7. Запускаем процесс вычислений нажатием кнопки *Решить*.

7.2. Найти оптимальное значение целевой функции *Z* при заданных ограничениях.

$Z=70*X_1+40*X_2.\rightarrow max$

Ограничения:

$60*X_1+40*X_2 \leq 420$

$12*X_1+6*X_2 \leq 74$

$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0$.- переменные должны быть неотрицательные.

$X_1, X_2 \in Z$. - переменные должны быть целочисленные.

Порядок выполнения работы:

1. Запустить редактор электронных таблиц *OpenOfice.org Calc*.

2. Создаем таблицу решения:

Отводим ячейки *для каждой независимой переменной* задачи. В нашем примере это ячейка B4 для X_1 и ячейка B5 для X_2 . Их оставляем пустыми.

Коэффициенты при переменных X_1 и X_2 неравенства (1) заносим в ячейки C4 и C5, коэффициенты неравенства (2) – в ячейки D4 и D5.

Коэффициенты при переменных X_1 и X_2 целевой функции Z записываем в ячейки E4 и E5.

	A	B	C	D	E
1					
2–3	*Переменные*	*Значение*	*Коэффициенты 1-го ограничения*	*Коэффициенты 2-го ограничения*	*Коэффициенты целевой функции*
4	X1	0	60	12	70
5	X2	0	40	6	40
6					
7	*Ограничения*				
8	420	74			
9					
10	*Результаты ограничений*		*Значение целевой функции*		
11	0	0	0		

Рис. 7.4. Исходные данные задачи

Отводим ячейку C13 для целевой функции и набираем в ней соответствующую формулу: = B4*E4+B5*E5.

Отводим ячейки A13 и B13 для создания формул, соответствующих левой части каждого ограничения:

=B4*C4+B5*C5

=B4*D4+B5*D5.

3. Открываем диалоговое окно *«Решатель»* (пункт меню *«Сервис»→Решатель*).

4. В поле *Целевая ячейка* указываем адрес ячейки, в которой находится формула для расчета целевой функции (ячейка C13). Ниже указываем тип оптимизации (поиск максимума или минимума).

5. В поле *Изменяя ячейки* отмечаем адреса ячеек, где находятся независимые переменные задачи (B4 и B5).

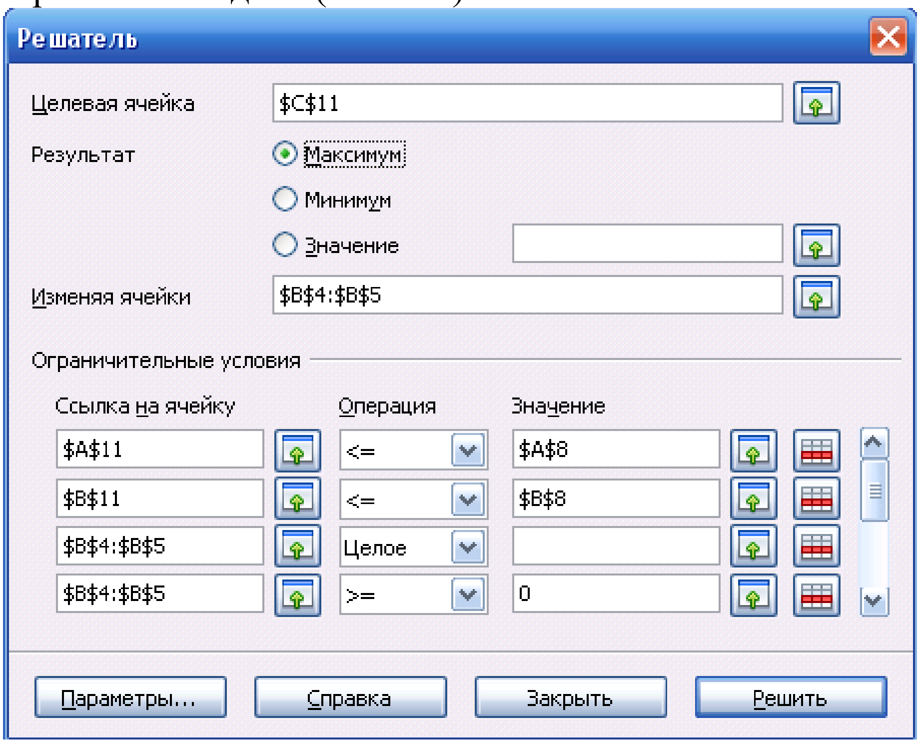


Рис. 7.5. Пример заполнение окна *Решателя*

6. В поле *Ограничительные условия* добавляем ограничения:

В левое поле вводим адрес ячейки, где находятся ограничения (или диапазон адресов ячеек), в центральном поле выбираем знак операции отношения (а также задаем целочисленность), в правом поле задаем адрес ячейки (или диапазон адресов), где находятся правые части ограничений. Вместо адресов в правой части можно просто задать числовые значения.

7. Запускаем процесс вычислений нажатием кнопки *Решить.*

Получаем результат:

$X_1 = 3$, $X_2 = 6$, Z=450.

8. Проверить, как изменится значение целевой функции, если убрать условие целочисленности переменных.

7.3. В пунктах A_1, A_2, A_3, производится однородная продукция в количествах a_1=100 ед., a_2=150 ед., a_3=50 ед. Готовая продукция поставляется в пункты B_1, B_2, B_3, B_4, потребности которых составляют: b_1 =75 ед., b_2 =80 ед., b_3 =60 ед., b_4 =85 ед. Стоимость c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j заданы матрицей $\left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$.

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

Порядок выполнения:

1. Заполнить лист *OpenOfice.org Calc.* исходными данными для решения задачи.

2. Предусмотреть блок ячеек «Матрица перевозок», «Фактически реализовано», «Транспортные расходы по потребителям», «Итого расходы».

3. Заполнить ячейки блока «*Матрица перевозок*» (B11:E13) числом 0,01.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Матрица транспортных расходов					Предложение поставщиков
2							
3		6	7	3	5		100
4		1	2	5	6		150
5		8	10	20	1		50
6							
7	Спрос потребителей	75	80	60	85		
8							
9		Матрица перевозок					Фактически
10		Потребитель1	Потребитель 2	Потребитель 3	Потребитель 4		реализовано
11	Поставщик 1	0,01	0,01	0,01	0,01		
12	Поставщик 2	0,01	0,01	0,01	0,01		
13	Поставщик 3	0,01	0,01	0,01	0,01		
14							
15	Фактически получено						
16							
17	Транспортные						Расходы
18	расходы по потребителям					Итого	

Рис. 7.6. Исходные данные транспортной задачи

4. Заполнить ячейки блока «*Фактически реализовано*» суммой по строкам «*Матрицы перевозок*» (в ячейку G11 записать сумму ячеек B11:E11, аналогично заполнить ячейки G12, G13).

5. Заполнить ячейки блока «*Фактически получено*» суммой по столбцам матрицы перевозок.

6. Заполнить ячейки блока «*Транспортные расходы по потребителям*». Для ячейки B18 записываем сумму произведений элементов первого столбца «*Матрицы транспортных расходов*» и первого столбца «*Матрицы перевозок*» (SUMPRODUCT(B3:B5;B11:B13)) и т.д.

7. Сформировать целевую функцию транспортной задачи:

В ячейку «Итого расходы» записать сумму «*Транспортных расходов по потребителям*».

8. Вызвать функцию «*Поиск решения» (Решатель*):

- Целевая ячейка «*Итого расходы*», целевая функция минимизируется.
- В поле «*Изменяя ячейки*» выделить диапазон ячеек «*Матрицы перевозок*».
- Установить ограничения (выделяя диапазон ячеек):
  - «*Фактически реализовано*» <= «*Предложение поставщиков*».
  - «*Фактически получено*» >= «Спрос потребителей»
  - Значения «*Матрицы перевозок*» положительны.

9**.** Получить результат решения (рис.7.7).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Матрица транспортных расходов					Предложение поставщиков
2							
3		6	7	3	5		100
4		1	2	5	6		150
5		8	10	20	1		50
6							
7	**Спрос потребителей**	75	80	60	85		
8							
9		Матрица перевозок					**Фактически**
10		Потребитель1	Потребитель 2	Потребитель 3	Потребитель 4		**реализовано**
11	Поставщик 1	5	0	60	35		100
12	Поставщик 2	70	80	0	0		150
13	Поставщик 3	0	0	0	50		50
14							
15	**Фактически получено**	75	80	60	85		
16							
17	**Транспортные расходы по**						**Расходы**
18	**потребителям**	100	160	180	225	**Итого**	665
19							

Рис. 7.7. Результат решения транспортной задачи

ЗАДАНИЕ И ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

1. Контрольная работа состоит из 3 заданий, которые необходимо выбрать в соответствии с Вашим вариантом. Отчет о контрольной работе оформляется на листах формата А4.

2. Работа должна содержать:

1. Титульный лист;
2. Содержание (с нумерацией страниц);
3. Формулировку задания по Вашему варианту;
4. Решение задач с пояснениями по ходу выполнения.

3. Для набора текста применить: шрифт *Times New Roman*, размер *14*, выравнивание *по ширине*. Во всем документе установить *поля:* правое – 2,5 см., остальные – 2 см. К заголовкам применить *полужирное* начертание и выравнивание *по центру*.

4. Работы сдаются в деканат за один месяц до начала сессии.

5. Зачтенные работы не возвращаются, остаются до сессии у преподавателя. Незачтенные работы возвращаются через деканат и должны быть исправлены и сданы в положенный срок (до сессии).

6. Студенты, не сдавшие работу в срок, к сдаче зачета не допускаются.

На титульном листе работы должен быть указан ***номер варианта, который определяется по последней цифре шифра зачетной книжки*** (**1** – 1-й вариант, **2** – 2-й вариант,…, **9** – 9-й вариант, **0** – 10-й вариант). Все используемые формулы и расчеты должны сопровождаться комментариями к ним и интерпретацией полученных результатов.

Задание 1. Линейное программирование.

На предприятии имеется возможность выпускать n видов продукции Π_j ($j=1,2, \ldots n$). При ее изготовлении используются ресурсы P_1, P_2, P_3. Размеры допустимых затрат ресурсов ограничены соответственно величинами b_1, b_2, b_3. Расход ресурса i-го $(i=\overline{1,3})$ вида единицу продукции j-го вида составляет a_{ij} единиц. Цена единицы продукции j-го вида равна c_j ден. ед. Требуется:

1. Построить математическую модель задачи.
2. Осуществить переход к каноническому виду задачи.
3. Симплекс-методом найти план выпуска продукции по видам с учетом имеющихся ограниченных ресурсов, который обеспечивал бы предприятию максимальный доход; вскрыть экономический смысл всех переменных, участвующих в решении задачи.
4. Сформулировать в экономических терминах двойственную задачу и составить ее математическую модель.
5. Определить решение двойственной задачи, используя симплекс-таблицу решения прямой задачи.

6. Установить, целесообразно ли выпускать новую продукцию $П_l$, на единицу которой ресурсы P_1, P_2, P_3 расходуются в количествах a_{1l}, a_{2l}, и a_{3l} ед., а цена единицы готовой продукции составляет c_l ед.

Исходные данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

	Вариант									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
n	3	3	3	3	3	4	3	4	4	3
b_1	8	5	12	4	18	34	1	12	4	2
b_2	18	4	27	7	16	16	2	8	3	3
b_3	6	2	6	12	8	22	1	48	3	4
a_{11}	4	0	2	1	1	2	1	2	1	1
a_{12}	1	2	1	3	2	4	2	4	3	1
a_{13}	2	5	6	0	1	1	0	0	0	0
a_{14}	-	-	-	-	-	5	-	8	1	-
a_{21}	6	2	3	1	2	4	1	7	2	1
a_{22}	1	4	3	0	1	1	1	2	1	0
a_{23}	3	2	9	2	1	4	2	2	0	2
a_{24}	-	-	-	-	-	1	-	6	0	-
a_{31}	6	1	2	1	1	2	2	5	0	1
a_{32}	1	0	1	3	1	3	0	8	1	1
a_{33}	1	1	2	2	0	1	3	4	4	1
a_{34}	-	-	-	-	-	2	-	3	1	-
c_1	24	20	14	3	3	7	3	3	2	1
c_2	4	8	6	8	4	3	1	4	6	1
c_3	8	30	22	5	2	4	4	3	2	1
c_4	-	-	-	-	-	2	-	1	3	-
l	4	4	4	4	4	5	4	5	5	4
a_{1l}	5	3	6	3	2	5	2	7	2	1
a_{2l}	8	5	5	1	3	4	1	5	4	2
a_{3l}	3	2	8	4	1	7	2	8	3	2
c_l	25	40	40	12	10	20	8	25	7	5

Задание 2. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

Таблица 2

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
0	$F=14x_1+8x_2 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1+x_2 \ge 2, \\ 3x_1+x_2 \ge 7, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	5	$F=x_1+x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1+4x_2 \le 16, \\ -4x_1+2x_2 \le 8, \\ x_1+3x_2 \ge 9, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
1	$F=2x_1+7x_2 \to \max$ $\begin{cases} -2x_1+3x_2 \le 14, \\ x_1+x_2 \le 8 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	6	$F=x_1+x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+4x_2 \le 16, \\ -4x_1+2x_2 \le 8, \\ x_1+3x_2 \ge 9, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
2	$F=-2x_1+5x_2 \to \min$ $\begin{cases} 7x_1+2x_2 \ge 14, \\ 5x_1+6x_2 \le 30, \\ 3x_1+8x_2 \ge 24, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	7	$F=30x_1+40x_2 \to \max$ $\begin{cases} 12x_1+4x_2 \le 300, \\ 4x_1+4x_2 \le 120, \\ 3x_1+12x_2 \le 252, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$
3	$F=-2x_1-3x_2 \to \min$ $\begin{cases} -4x_1+2x_2 \ge 4, \\ x_1+x_2 \ge 6, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	8	$F=10x_1+3x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 33, \\ x_1+6x_2 \ge 14, \\ 5x_1-4x_2 \ge 2, \\ x_1-2x_2 \le 6. \end{cases}$
4	$F=4x_1+6x_2 \to \max$ $\begin{cases} -4x_1+2x_2 \le -2, \\ 2x_1+x_2 \le -3, \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$	9	$F=10x_1+3x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 33, \\ x_1+6x_2 \ge 14, \\ 5x_1-4x_2 \ge 2, \\ x_1-2x_2 \le 6. \end{cases}$

Задание 3. Транспортная задача.

В пунктах A_i $(i=\overline{1,3})$ производится однородная продукция в количествах a_i ед. Готовая продукция поставляется в пункты B_j $(j=\overline{1,4})$, потребности которых составляют b_j единиц. Стоимость c_{ij} перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j заданы матрицей $\left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$.

Требуется:

1. Построить математическую модель задачи.

2. Найти первоначальное распределение перевозок методом минимального элемента.

3. Найти первоначальное распределение перевозок методом северо-западного угла (1-5 варианты), методом Фогеля (6-10 варианты).

4. Выбрать наиболее оптимальный опорный план (из найденных).

5. Оптимизировать полученное опорное решение методом потенциалов из условия минимизации суммарных затрат на доставку продукции потребителю.

6. Вычислить суммарные затраты $f_{\min}$.

7. Установит пункты, в которых остается нераспределенная продукция, и указать ее объем.

Исходные данные для решения задачи приведены в таблице 3:

Таблица 3

	Вариант									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a_1	750	250	300	450	350	250	200	500	500	750
a_2	200	550	700	200	750	650	500	900	200	200
a_3	550	350	400	350	300	300	300	100	600	550
b_1	450	300	250	150	200	350	150	200	250	450
b_2	300	150	450	300	50	50	450	650	150	300
b_3	350	400	150	50	600	150	50	150	350	350
b_4	250	150	350	400	400	450	250	300	250	250
c_{11}	1	2	3	6	4	5	3	7	4	1
c_{12}	6	6	7	4	5	10	4	7	8	6
c_{13}	5	3	6	8	8	4	8	8	3	5
c_{14}	3	5	4	3	6	6	2	4	7	3
c_{21}	4	8	7	5	4	7	4	6	5	4
c_{22}	3	7	5	1	7	8	1	1	1	3
c_{23}	5	10	4	4	1	10	4	2	6	5
c_{24}	7	5	9	4	2	9	5	7	4	7
c_{31}	5	2	3	7	2	1	9	4	4	5
c_{32}	8	7	6	11	6	5	10	7	6	8
c_{33}	10	5	5	9	4	4	6	5	5	10
c_{34}	4	3	1	6	7	2	5	6	3	4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Электронный ресурс] / И.Л. Акулич. – Лань. 2011. – 352 с. – Электрон. дан. – Режим доступа http://e.lanbook.com/view/book/2027/.

2. Друкер П. Эффективное управление: Экон. задачи и оптимальные решения [Текст] / П. Друкер. – М.: Гранд, 1998. – 285 с.

3. Кузнецов А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию: Учебное пособие [Текст] / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич. – 2-е изд. перераб. и дополн. – Минск: Высшая школа, 2001. –448 с.

4. Лесин В.В. Основы методов оптимизации [Электронный ресурс] / В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец. – Лань, 2011. – Электрон. дан. – Режим доступа http://e.lanbook.com/view/book/1552/.

5. Просветов Г.И. Методы оптимизации: Учебно-практическое пособие. [Текст] / Г.И. Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2009. –168 с.

6. Спицнадель В.Н. Теория и практика принятия оптимальных решений: Учеб. пособие [Текст]/ В.Н. Спицнадель. – СПб.: Бизнес-пресса, 2002. – 394 с.

7. Экономико-математические методы и модели: Задачник [Текст] / под ред. С.И. Макарова, С.А. Севостьяновой. – М.: КНОРУС, 2008. – 208с.

Наталья Сергеевна Зорина

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Методическое пособие для студентов очной и заочной
форм обучения направления «Экономика», профиль «Финансы и кредит»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 24.02.15. Формат 60х84 1/16.
Усл.печ.л. 2,4. Тираж 30 экз. Зак. 151371. Рег. № 2

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.